SGH

Dodatek 4

Funkcje łączące

Michał Rubaszek

Rozkład normalny

W większości zastosowań przyjmuje się, że stopy zwrotu mają wielowymiarowy rozkład normalny:

$$R \sim N(\mu, \Sigma)$$

Założenie to upraszcza wnioskowanie na temat właściwości stóp zwrotu z portfela $R_p = w'R$:

$$R_p \sim N\left(\mu_p, \sigma_p^2\right)$$

gdzie $\mu_p = w'\mu$ oraz $\sigma_p^2 = w'\Sigma\mathrm{w}$

Rozkład normalny

- Przy założeniu wielowymiarowego rozkładu normalnego zależność między zmiennymi y i x jest liniowa

$$y = a + bx + \epsilon, \qquad b = \frac{cov(y,x)}{var(x)}, a = \bar{y} - b\bar{x}$$

- Oznacza to, że zależność między zmiennymi jest zawsze taka sama, niezależnie od skali zmiany
- W praktyce, jednakże powiązania mogą zależeć od skali zmian (siła zależności inna w trakcie kryzysu, a inna w normalnych okolicznościach)

Korelacja temp wzrostu dla EUR/PLN i EUR/USD

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
0,54	0,40	0,31	-0,05	-0,08	-0,18	-0,33	-0,32	-0,36	-0,35	-0,27	-0,82

Rozkład normalny

Skalę nieliniowości zależności między zmiennymi możemy sprawdzić m.in. poprzez stworzenie wykresu dla „exceedance correlation”:

$$\tilde{\rho}(p) = \begin{cases} \text{Corr}[X, Y | X \leq Q_X(p) \text{ and } Y \leq Q_Y(p)], & \text{for } p \leq 0.5 \\ \text{Corr}[X, Y | X > Q_X(p) \text{ and } Y > Q_Y(p)], & \text{for } p > 0.5 \end{cases}$$

gdzie $Q_X(p)$ oraz $Q_Y(p)$ to p-te percentyle dla *X* i *Y*

Funkcje łączące

- Funkcja łącząca jako dogodna metoda modelowania nieliniowych zależności między zmiennymi

- Ogólna idea polega na podzieleniu rozkładu łącznego dla zmiennych Y i X na 2 części:
  - Rozkłady brzegowe dla X i Y
  - Funkcja łącząca rozkłady brzegowe

Funkcje łączące

Oznaczenia:

f(X) oraz g(Y):	funkcje gęstości rozkładu brzegowego
U=F(X) oraz V=G(Y):	dystrybuanty rozkładu brzegowego
h(X,Y) oraz H(X,Y):	f. gęstości oraz dystrybuanta rozkładu łącznego
C(U,V):	f. łącząca

$$H(X,Y) = C\big(F(X),G(Y)\big) = C(U,V)$$
$$h(X,Y) = f(X)g(Y)C(F(X),G(Y))$$

Aby ustalić rozkład łączny należy dokonać wyboru nt.:

- rozkładów brzegowych F(X) i G(Y)
- postaci funkcji łączącej C(U,V)

Funkcje łączące

TWIERDZENIE SKLARA:

Niech H(X,Y) będzie dwuwymiarową funkcją dystrybuanty z dystrybuantami brzegowymi F(X) i G(Y). Wtedy istnieje kopula C spełniająca warunek:

$$H(X,Y) = C\big(F(X), G(Y)\big)$$

Jeżeli F i G są ciągłe, wówczas C jest jednoznaczna.

B. Funkcje łączące

Losowanie z rozkładu łącznego

Etap 1: Losujemy (U,V) z C(U,V)

Etap 2: Liczymy $X=F^{-1}(U)$ oraz $Y=G^{-1}(V)$

Najpopularniejsze funkcje łączące

SGH

B. Eliptyczne funkcje łączące

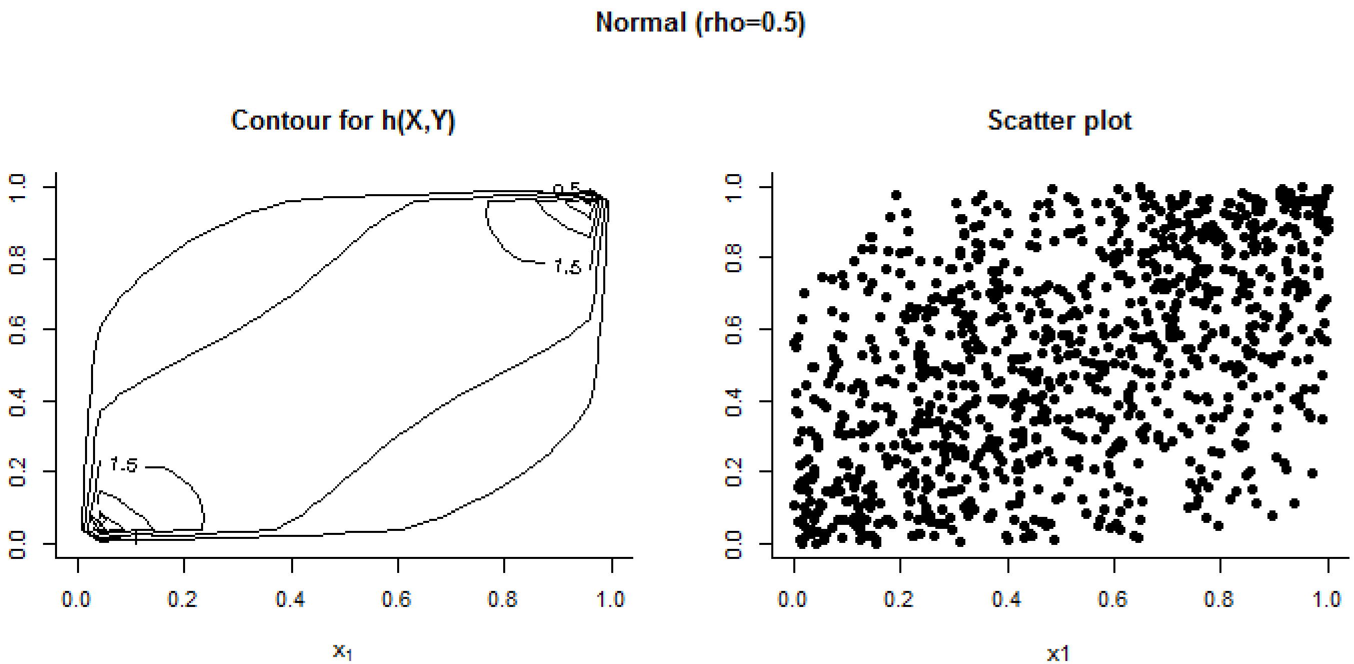
Gęstość eliptycznych funkcji łączących wynosi (2 zmienne):

$$c(U,V) = |\Sigma|^{-0.5}\varphi\{(u-\mu)'\Sigma^{-1}(u-\mu)\}$$

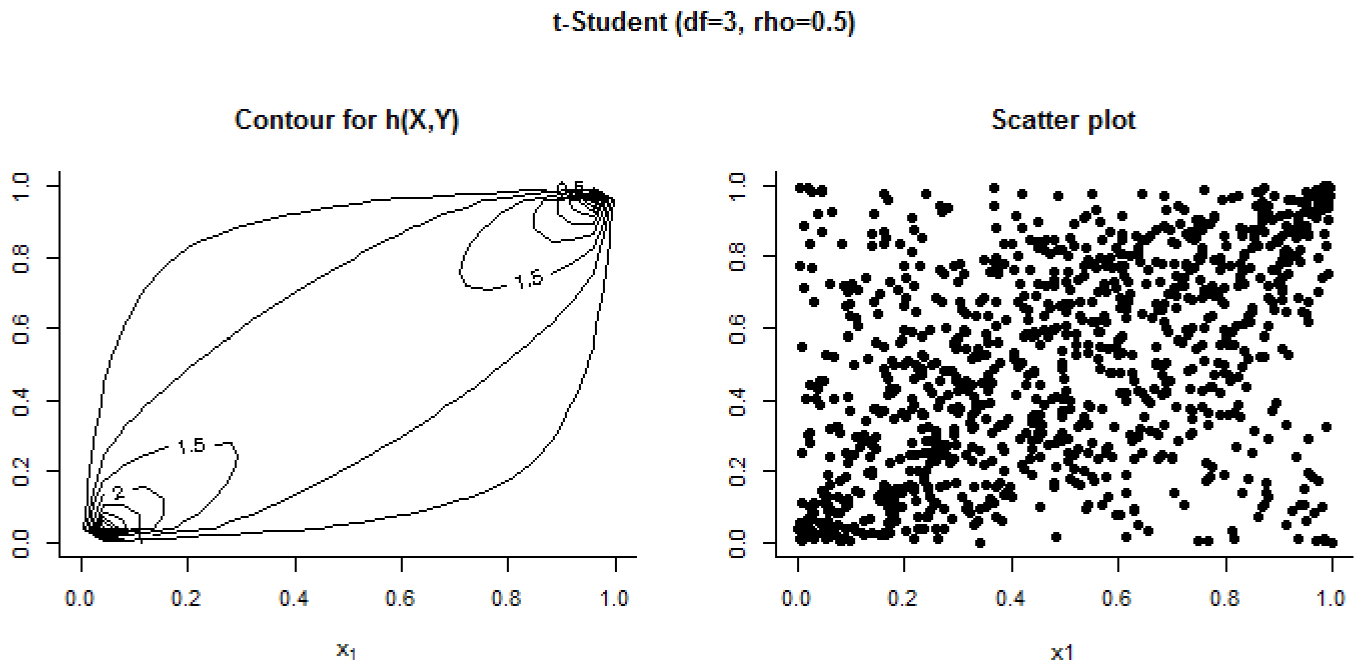
gdzie $u = [U\ V]'$ zaś φ to tzw. generator

	Generator, tj. φ
Wielowymiarowy normalny	$\varphi(x) = \mathrm{const} \times \exp(-\frac{x}{2})$
Wielowymiarowy t-Student	$\varphi(x,v) = \mathrm{const} \times \left(1+\frac{x}{v}\right)^{-\frac{v+2}{2}}$

B. Funkcje łączące: copula normalna



B. Funkcje łączące: copula t-Studenta



B. Archimedesowe funkcje łączące

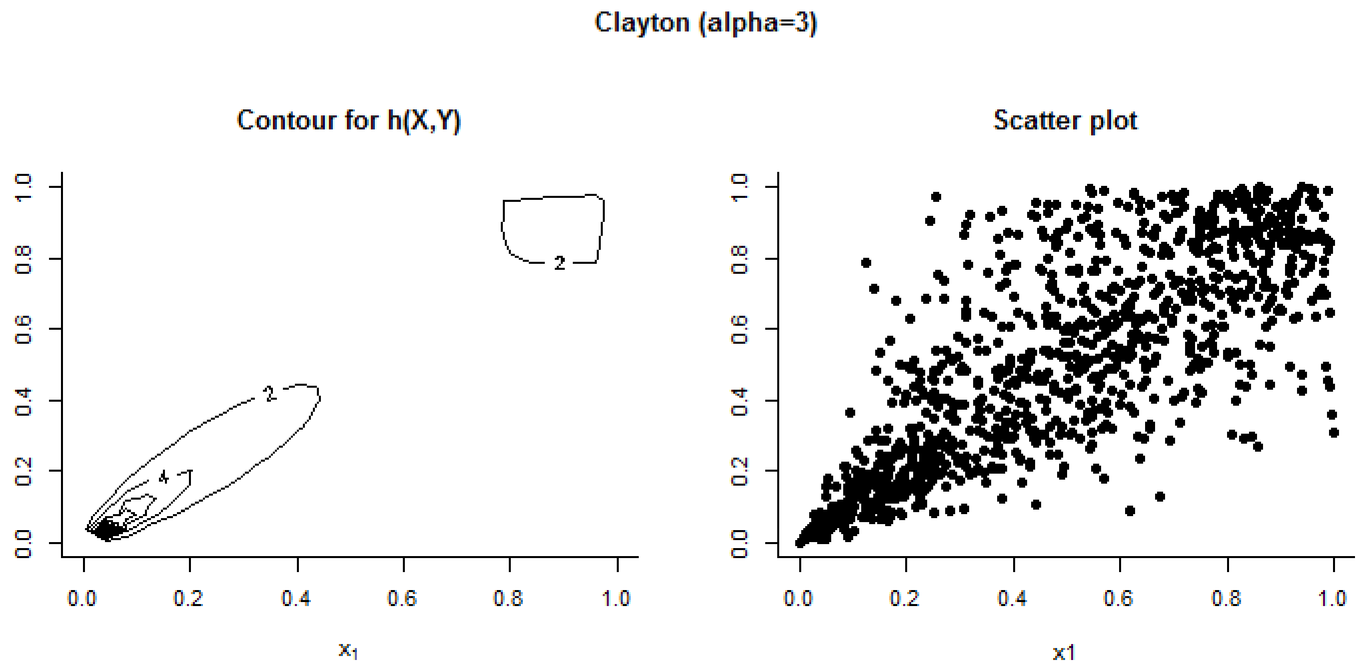
Wartość archimedesowych funkcji łączących wynosi:

$$C(U,V) = \varphi^{-1}(\varphi(U) + \varphi(V))$$

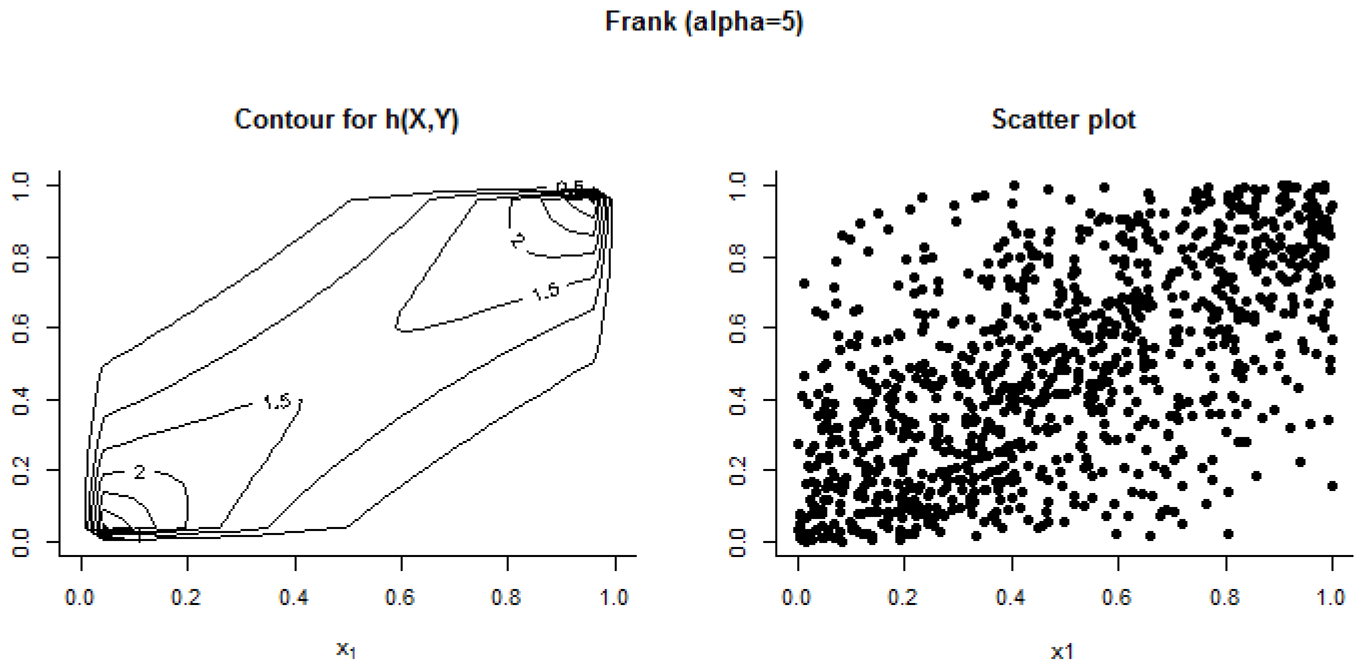
gdzie φ to tzw. generator

Family	Parameter Space	Generator $\varphi(t)$	Generator Inverse $\varphi^{-1}(s)$	Frailty Distribution
Clayton (1978)	$\alpha \geq 0$	$t^{-\alpha} - 1$	$(1+s)^{-1/\alpha}$	Gamma
Frank (1979)	$\alpha \geq 0$	$-\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$	$-\alpha^{-1} \ln\left(1 + e^{-s}(e^{-\alpha} - 1)\right)$	Log series
Gumbel (1960)	$\alpha \geq 1$	$(-\ln t)^{\alpha}$	$\exp(-s^{1/\alpha})$	Positive stable

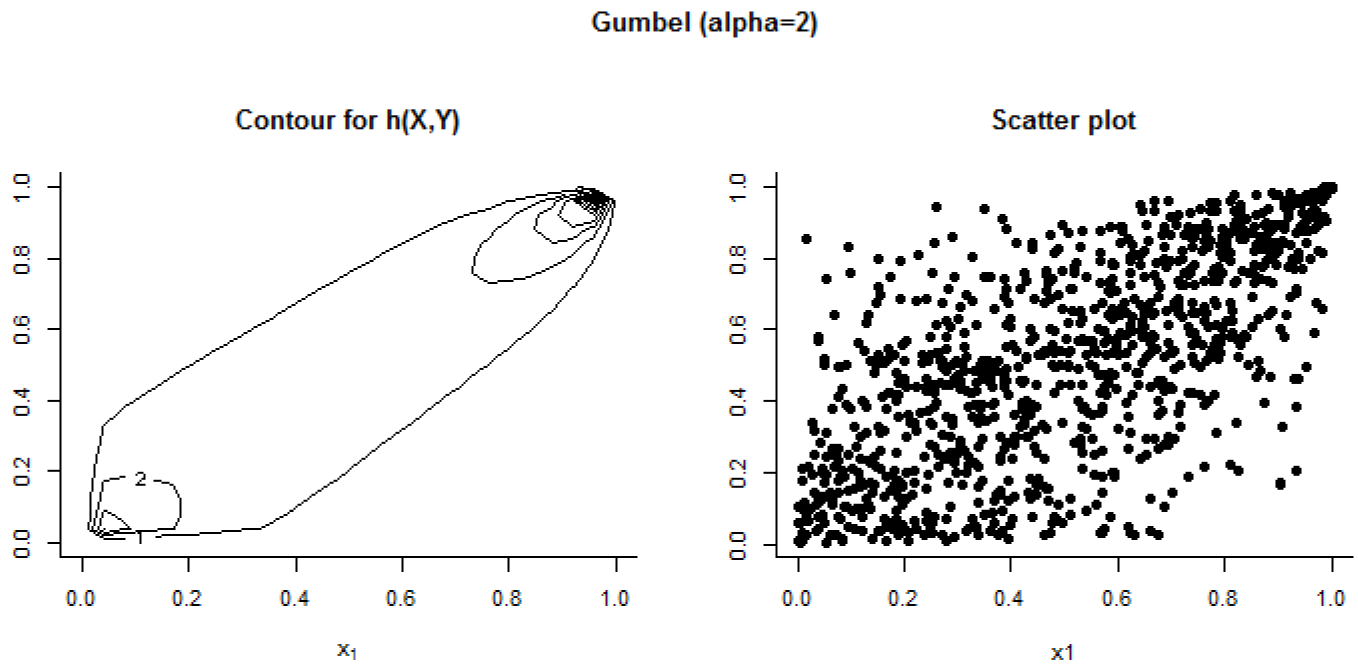
B. Funkcje łączące: copula Claytona



B. Funkcje łączące: copula Franka



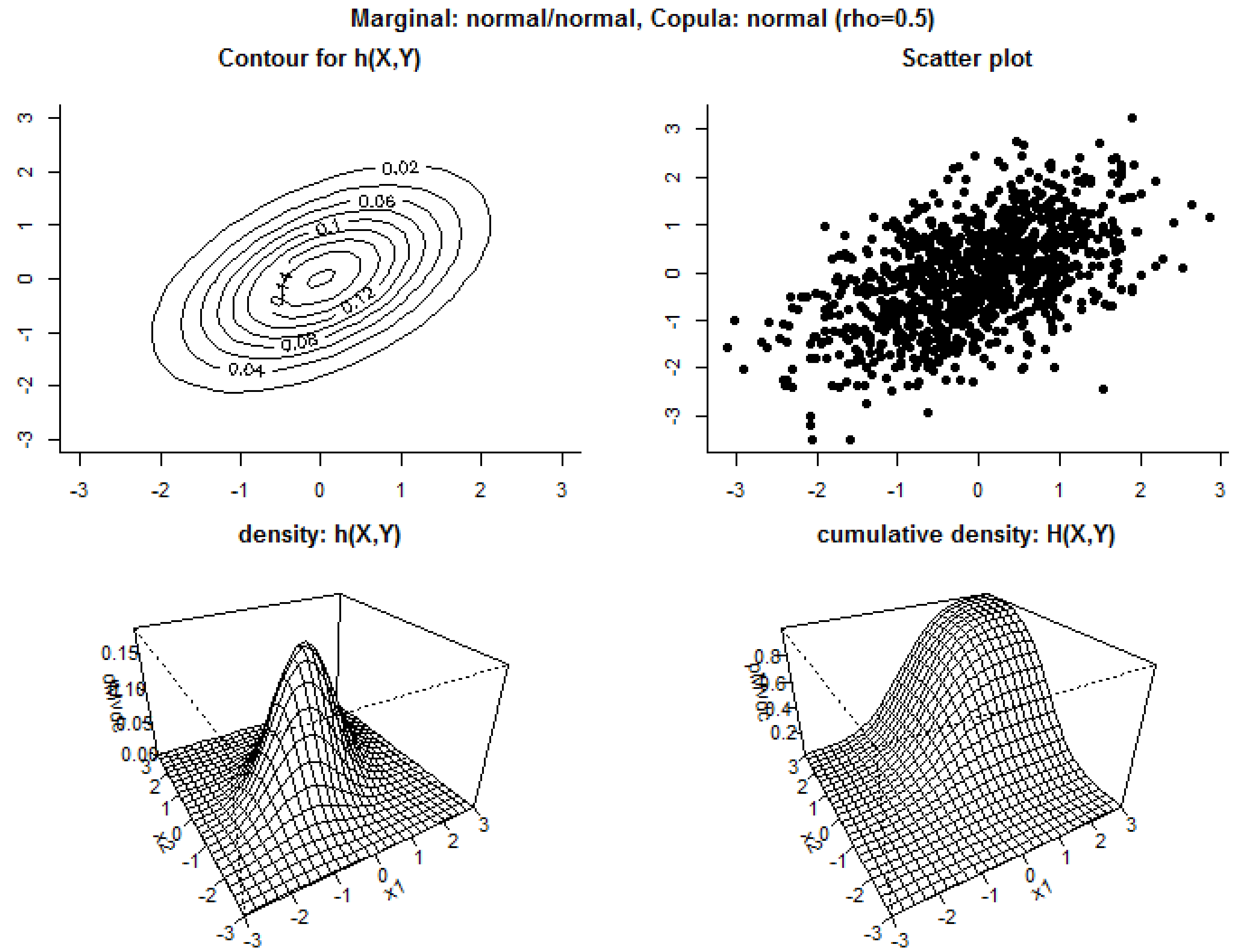
B. Funkcje łączące: copula Gumbela



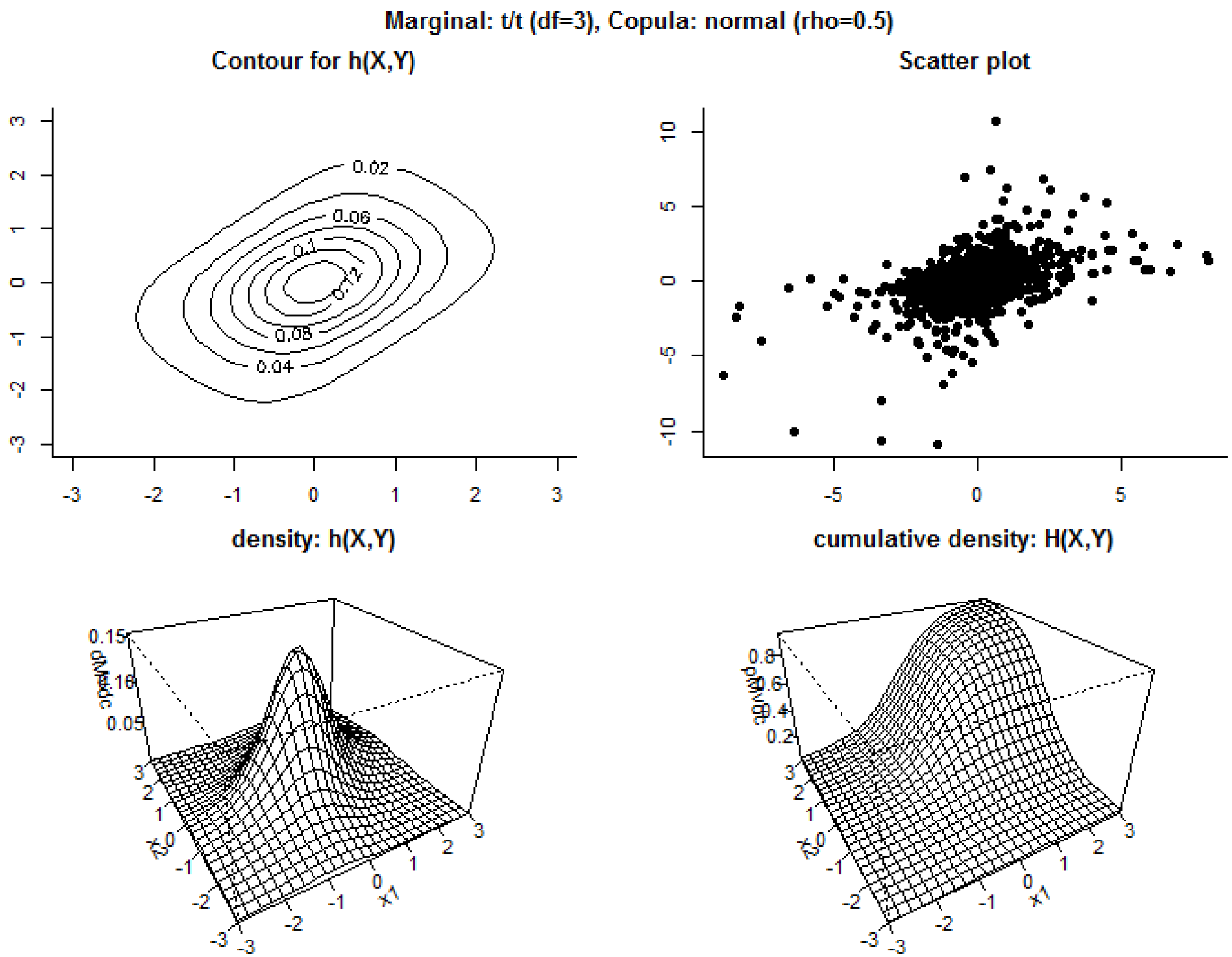
SGH

Copula normalna
Różne rozkłady brzegowe

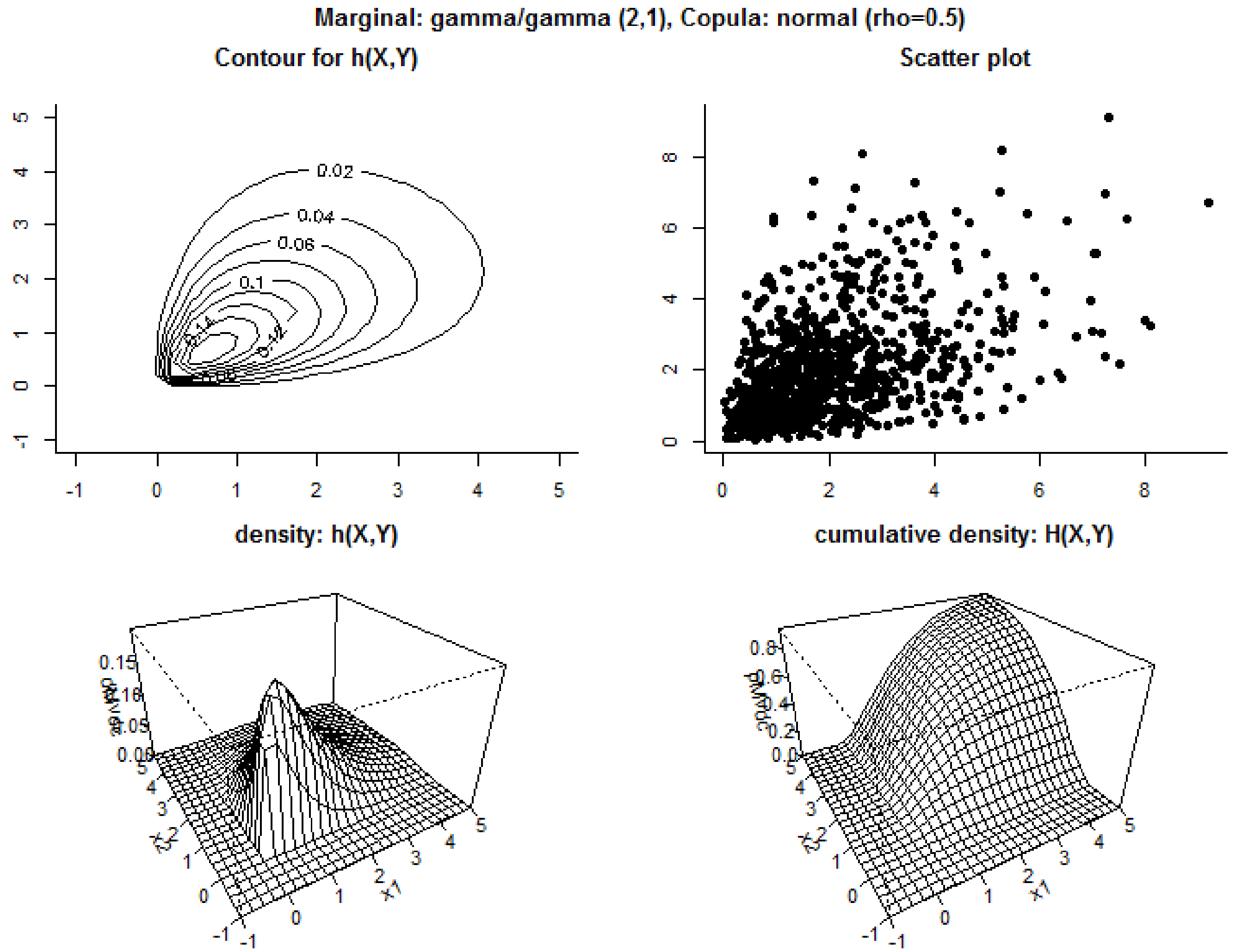
B. Funkcje łączące: copula normalna



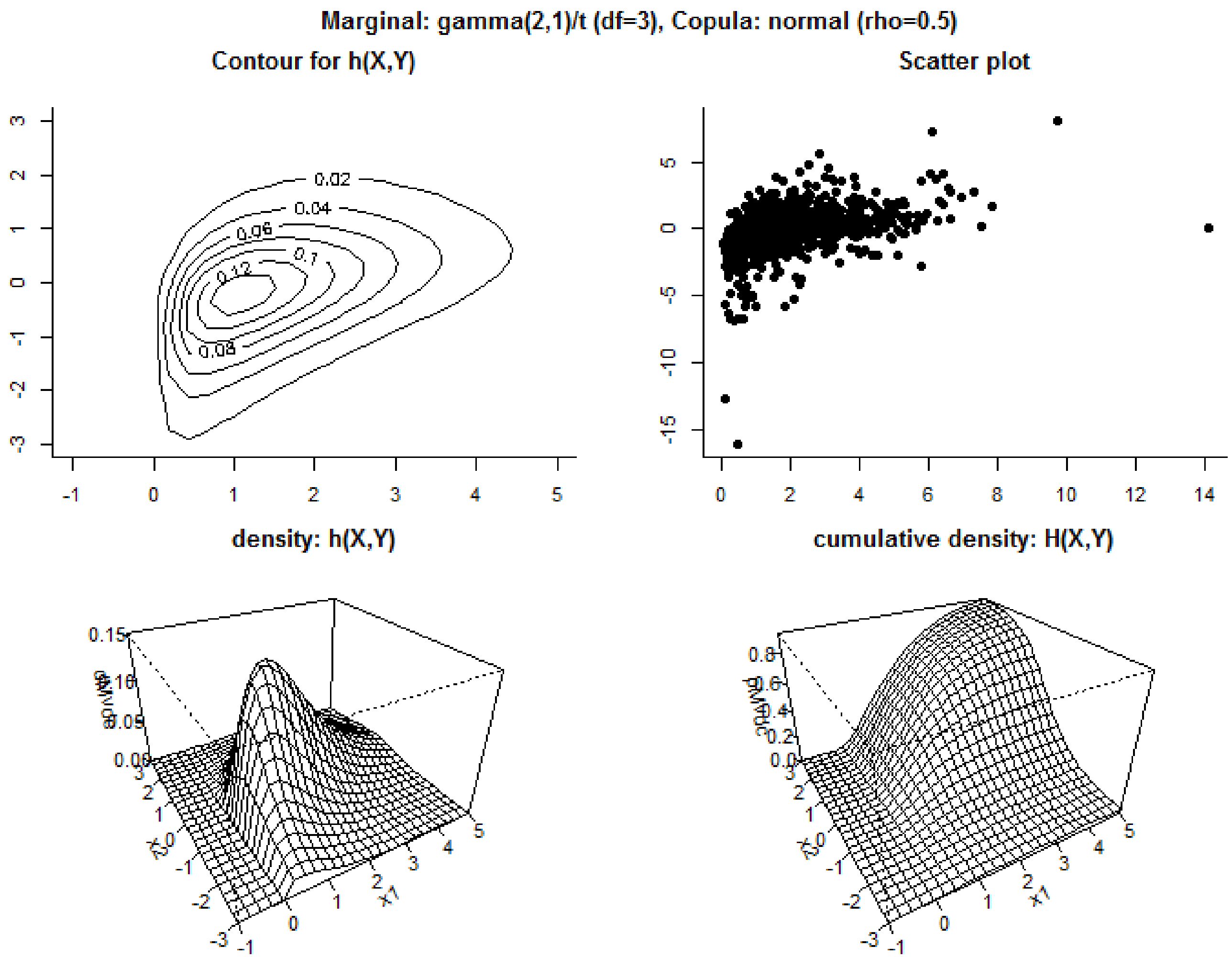
B. Funkcje łączące: copula normalna



B. Funkcje łączące: copula normalna



B. Funkcje łączące: copula normalna



Dopasowanie do danych

B. Funkcje łączące

Metoda momentów – korelacja tau Kendalla :

Definicja tau Kendalla:

$$\tau = \mathrm{P}\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\} - \mathrm{P}\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}$$

Wartość tau Kendalla w próbie:

$$\hat{\tau} = \frac{P - Q}{N(N-1)/2}$$

P – liczba par zgodnych (concordant): $\mathrm{N}\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\}$

Q – liczba par niezgodnych (discordant): $\mathrm{N}\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}$

Dla Copuli $C(U, V|\theta)$ szukamy parametru θ dla której wartość:

$$\tau_\theta = 4\int\int C(U, V|\theta) dC(U, V|\theta) - 1$$

Jest najbliższa $\hat{\tau}$

B. Funkcje łączące

Łączna estymacja ML dla wszystkich parametrów:

szukamy parametru θ dla którego funkcja osiąga maximum

$$l(\theta|X,Y) = \sum_{t=1}^{T} \log c[F(x_t|\,\theta), G(y_t|\,\theta)] + \log f(x_t|\theta) + \log g(y_t|\theta)$$

Dwu-krokowa metoda ML

Krok 1: estymacja parametrów rozkładów brzegowych

Krok 2: estymacja parametrów funkcji łączącej

VaR i ES: symulacje Monte Carlo

Metoda liczenia VaR i ES

1. Losujemy (u,v) z C(U,V)

2. Liczymy x=F^{-1}(u) oraz y=G^{-1}(v)

3. Kroki 1 i 2 powtarzamy N razy, aby otrzymać szeregi (x_i, y_i) dla i=1,2,…,N

4. Liczymy stopy zwrotu dla portfela $rp_i = w_x x_i + w_y y_i$

(podobnie jak dla metody „symulacja historyczna”)

- porządkujemy stopy zwrotu od najmniejszej do największej: $rs_1 < rs_2$ …
- VaR(α) ustalany jako $m = mod(\alpha N)$-ta stopa (rs_m)

$$VaR(\alpha) = rs_m$$

- $ES(\alpha)$ liczony jako średnia stopa zwrotu dla stóp mniejszych niż $VaR(\alpha)$

$$ES(p) = \frac{1}{m}\sum_{1}^{m} rs_i$$